2021 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）试题

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

(1)当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

(A)低阶无穷小.　(B)等价无穷小.　(C)高阶无穷小.　(D)同阶但非等价无穷小.

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处

(A)连续且取极大值.　(B)连续且取极小值.

(C)可导且导数为 0.　(D)可导且导数不为 0.

(3)设函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有两个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(0,+\infty)$.　(B) $(0,e)$.　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$.　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$.

(4)设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$.　(B) $dx-dy$.　(C) dy.　(D) $-dy$.

(5)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) $2,0$.　(B) $1,1$.　(C) $2,1$.　(D) $1,2$.

(6)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

(7)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$ 若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(8)设 A，B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

(A)若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\bar{B})=P(A)$.

(B)若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$

(C)若 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

(D)若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

(9)设 (X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n) 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^{\ 2},\sigma_2^{\ 2};\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$ 则

(A) $E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}{n}$.

(B) $E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}{n}$.

(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(10)设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 1，3，2，2，1，3，1，2，可得 θ 的最大似然估计值为

(A)$\frac{1}{4}$.　　(B)$\frac{3}{8}$.　　(C)$\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{5}{2}$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.）

(11)若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$______________.

(12)$\int_{\sqrt{5}}^{5}\dfrac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$ ______________.

(13)设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\cdot\sin\pi x\,(0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为______________.

(14)差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为______________.

(15)多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为______________.

(16)甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，

再从乙盒中任取一球.令 X ,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数____________.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}[\alpha\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}]$ 存在，求 α 的值.

(18)（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

(19)（本题满分 12 分

设有界区域 D 是 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围城的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy$.

(20)（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(1)求 $y_n(x)$；

(2)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵，求 a，b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)（本题满分 12 分

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X ,较长的的一段长度记为 Y ,令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度;

(2)求 Z 的概率密度.

(3)求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.